

# 1 — PRINCIPE DE FERMAT

La présentation de l'Optique géométrique proposée ici est axiomatique ; elle développe des outils nécessaires au traitement des systèmes de *formation d'images*, mais que l'on rencontrera aussi dans d'autres domaines de la Physique.

## 1.1 – Chemin optique et principe de Fermat

### 1.1.1 - Optique géométrique

L'Optique géométrique étudie les trajectoires des rayons lumineux, sans se préoccuper de leur nature (celle-ci sera étudiée ultérieurement ; nous verrons alors que les faisceaux de rayons lumineux matérialisent la propagation d'ondes électromagnétiques). Cette propagation dépend évidemment de la présence des obstacles rencontrés lors de la propagation ; nous verrons alors comment ces obstacles peuvent influencer la trajectoire suivie par ces rayons lumineux ; c'est le phénomène de diffraction.

L'étude de l'Optique géométrique néglige *a priori* le phénomène de diffraction : nous supposons donc que la lumière ne rencontre aucun obstacle lors de sa propagation, sauf bien sûr les surfaces limitant deux milieux transparents. Ces surfaces seront supposées suffisamment régulières pour qu'on puisse, en tout point leur associer un plan tangent.

On parlera de *dioptries* pour les surfaces permettant la transmission et la réflexion de la lumière ; une surface qui ne permet que la réflexion est un *miroir*.

Nous ne nous préoccuperons pas non plus ici de la nature physique des sources de lumière ; il nous suffira d'affirmer l'existence d'une ou plusieurs sources ponctuelles de lumière (les sources étendues étant considérées comme des associations de sources ponctuelles), éclairant l'espace selon des lois développées plus bas.

### 1.1.2 - Principe de Fermat

Considérons deux points A et B quelconques, susceptibles d'être l'un la source et l'autre la destination d'un rayon lumineux. Il est bien connu que le trajet AB est parcouru par la lumière en ligne droite lorsque A et B sont situés dans un même milieu homogène ; nous admettons, comme fondement de l'Optique géométrique, le *principe de*

*Fermat* qui généralise ce résultat à des rayons lumineux suivant des trajets quelconques dans des milieux aux propriétés optiques complètement arbitraires.

Dans son énoncé le plus simple, ce principe affirme que, lors de son parcours d'un point A à un point B donné, la lumière suit une courbe (C) qui assure une durée de trajet extrême (en général minimale) par rapport à tout trajet voisin.

### 1.1.3 - Indice optique

La durée  $\tau$  du trajet de la lumière d'un point A à un point B dépend de la vitesse  $v$  de la propagation de la lumière en chaque point M du trajet ; si on note  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide, on choisira de noter  $v = c_0/n$  en définissant l'*indice optique*  $n$  du milieu matériel traversé en M.

Cet indice optique est en général supérieur à 1 (ce qui indique  $v < c_0$ ) mais ce n'est pas une obligation, la vitesse de propagation (ou vitesse de phase)  $v$  n'étant pas toujours inférieure à  $c_0$  (ce n'est pas une vitesse matérielle). Nous verrons que, dans le cas de certains milieux matériels transparents (les plasmas dans le domaine des ondes radio) on peut avoir  $n < 1$ .

Notons aussi que l'indice optique d'un milieu matériel dépend de la fréquence  $f$  ou, ce qui revient au même, de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = c_0/f$  de l'onde étudiée. Pour la lumière visible,  $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 750 \text{ nm}$  (limites conventionnelles) avec un sens de variation précisé par la fig. 1.1.

La dépendance d'un indice avec la longueur d'onde constitue le phénomène de *dispersion*, présent dans tous les milieux matériels sauf le vide. Pour la plupart des matériaux usuels,  $\frac{dn}{d\lambda_0} < 0$  ; on peut souvent adopter le *modèle de Cauchy*,  $n = a + \frac{b}{\lambda_0^2}$  ou  $a$  et  $b$  sont des constantes positives.

Retenons enfin quelques ordres de grandeurs. On a d'abord pour vitesse de la lumière dans le vide la valeur (constante universelle, indépendante de l'état de mouvement de la source et de l'observateur) :

$$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.1)$$

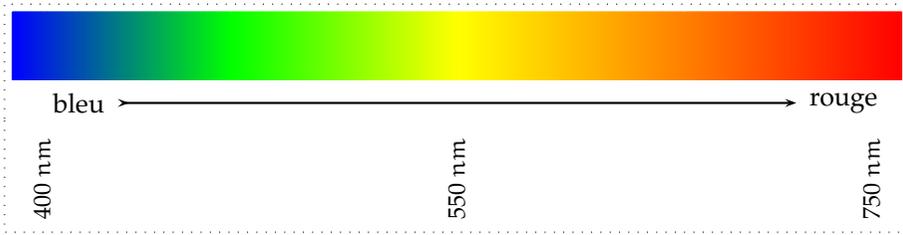


FIG. 1.1 – Longueur d’onde et couleur de la lumière

L’indice optique des milieux transparents usuels vérifie en général  $1 \leq n \leq 2$  avec par exemple  $n - 1 = 3 \times 10^{-4}$  pour l’air dans les conditions normales de température et de pression,  $n - 1 \simeq 0,33$  pour l’eau et  $0,2 \leq n - 1 \leq 0,9$  pour les verres optiques.

### 1.1.4 - Chemin optique

On peut alors exprimer la durée d’un trajet infinitésimal selon  $dt = ds/v$  en fonction de la distance  $ds$  parcourue, donc aussi  $\tau = \int_{M \in (\mathcal{C})} n(M) \frac{ds}{c_0}$ , l’intégrale étant étendue du point A au point B : c’est cette intégrale qui doit être extrémale, d’après le principe de Fermat.

La grandeur  $c_0$  étant une constante universelle, on définit le *chemin optique* (AB) le long d’une courbe (C) arbitraire par l’intégrale curviligne :

$$\mathcal{L} = (AB) = \int_{M \in (\mathcal{C})} n(M) ds = \int_{M \in (\mathcal{C})} n(M) \vec{u}_t(M) \cdot d\vec{r} \quad (1.2)$$

où on a noté  $\vec{u}_t(M)$  le vecteur unitaire tangent au point M à la courbe (C) ; notons que l’intégrale (1.2) peut éventuellement être négative, selon le sens choisi pour l’orientation de la courbe (C) ; cette intégrale curviligne est un premier exemple d’intégrale de circulation, qu’on définira généralement sous la forme  $\int_{M \in (\mathcal{C})} \vec{W}(M) \cdot d\vec{r}$  pour tout champ vectoriel  $\vec{W}(M)$ . On peut alors réécrire le principe de Fermat :

#### PRINCIPE DE FERMAT

Lors de son parcours d’un point A à un point B donné, la lumière suit une courbe (C) qui assure un chemin optique extrémal par rapport à tout trajet voisin.

Un chemin optique positif (avec  $\vec{u}_t$  dans le même sens que  $d\vec{r}$ , donc si la courbe est orientée dans le sens effectif de parcours de la lumière), sera dit *réel* ; un chemin optique négatif sera dit *virtuel*.

## 1.2 – Conséquences

### 1.2.1 - Milieux homogènes

Dans le cas d’un milieu *homogène*,  $n$  est constant et le chemin optique prend la forme  $(AB) = n \vec{u}_t \cdot \overrightarrow{AB}$ , ce que l’on peut noter  $(AB) = n \overline{AB}$ , en fonction de la mesure algébrique de la distance (AB). Un tel chemin optique est extrémal si la distance AB est minimale (étant bornée inférieurement, une distance ne peut être maximale), donc pour la ligne droite : c’est la *loi de la propagation rectiligne*.

Dans le cas d’une succession de milieux homogènes (cf. fig. 1.2), d’indices successifs  $n_k, k \in \{0, \dots, N\}$ , deux milieux consécutifs d’indices  $n_k$  et  $n_{k+1}$  étant séparés par les dioptres  $(\mathcal{D}_{k,k+1})$  ou les miroirs  $(\mathcal{M}_{k,k+1})$ , on peut écrire le chemin optique  $(AB) = \sum_{k=0}^N n_k \overline{I_k I_{k+1}}$  soit encore  $(AB) = \sum_{k=0}^N n_k \vec{u}_k \cdot \overrightarrow{I_k I_{k+1}}$ , sous réserve de noter  $I_0 = A$  et  $I_N = B$ , le vecteur unitaire  $\vec{u}_k$  étant celui du segment  $\overrightarrow{I_k I_{k+1}}$ . Sur la fig. 1.2,  $N = 3$  et  $n_1 = n_2$ .

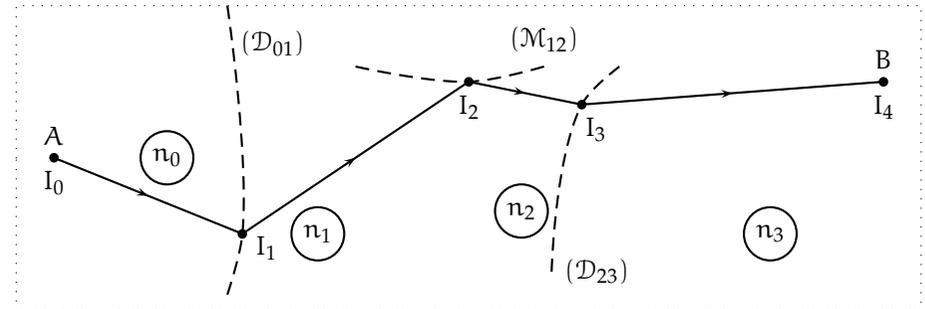


FIG. 1.2 – Succession de milieux homogènes

### 1.2.2 - Lois de Snell-Descartes

La nature rectiligne des trajets  $I_k I_{k+1}$  étant imposés dans chaque milieu homogène, le principe de Fermat impose seulement le choix des points intermédiaires  $I_k$  ( $0 < k < N$ ) de réfraction ou de réflexion des rayons lumineux sur les différents dioptres et miroirs.

Ce choix doit vérifier  $d(AB) = 0$  avec  $d \left( \vec{u}_k \cdot \overrightarrow{I_k I_{k+1}} \right) = \vec{u}_k \cdot \left( d\overrightarrow{O I_{k+1}} - d\overrightarrow{O I_k} \right)$  puisque  $d\vec{u}_k$  est perpendiculaire à  $\vec{u}_k$  et donc à  $\overrightarrow{I_k I_{k+1}}$  : un vecteur unitaire vérifie tou-

jours  $\vec{u}_k^2 = 1$  donc  $\vec{u}_k \cdot d\vec{u}_k = 0$ . On peut donc regrouper la condition issue du principe

de Fermat sous la forme  $\sum_{k=1}^{N-1} n_k d\vec{OI}_k \cdot (n_k \vec{u}_k - n_{k+1} \vec{u}_{k+1}) = 0$ .

Cette condition n'est possible, pour tout déplacement infinitésimal arbitraire du point  $I_k$  sur le dioptre ( $\mathcal{D}_{k,k+1}$ ) ou sur le miroir ( $\mathcal{M}_{k,k+1}$ ), que si le vecteur  $n_k \vec{u}_k - n_{k+1} \vec{u}_{k+1}$  est *normal* à la surface de ce dioptre ou de ce miroir. En notant enfin  $\vec{g}_{k,k+1}$  un vecteur unitaire normal à cette surface, on a donc :

$$\vec{g}_{k,k+1} \wedge n_k \vec{u}_k = \vec{g}_{k,k+1} \wedge n_{k+1} \vec{u}_{k+1} \quad (1.3)$$

Cette relation, qui introduit l'*invariant de propagation*  $\vec{g} \wedge n\vec{u}$  n'est autre que la loi de Snell–Descartes de la réflexion ou de la réfraction. En effet, elle affirme d'abord que le vecteur  $\vec{u}_{k+1}$  est orthogonal à  $\vec{g}_{k,k+1} \wedge \vec{u}_k$ , donc à la normale au *plan d'incidence* défini par le rayon incident  $\vec{u}_k$  et la normale  $\vec{g}_{k,k+1}$  au point d'incidence :

#### PREMIÈRE LOI DE SNELL–DESCARTES

Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont contenus dans le plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale au dioptre ou au miroir au point d'incidence.

De plus, le vecteur invariant  $\vec{g}_{k,k+1} \wedge n_k \vec{u}_k$  a pour norme  $n_k \sin i_k$ , où  $i_k$  est l'angle (non orienté) formé entre  $\vec{g}_{k,k+1}$  et  $\vec{u}_k$  ; on retrouve donc bien :

#### SECONDE LOI DE SNELL–DESCARTES

Dans le cas de la réfraction, le rayon lumineux traverse la normale et les angles formés avec celle-ci par les rayons incident  $i_k$  et réfracté  $i_{k+1}$  vérifient la relation  $n_k \sin i_k = n_{k+1} \sin i_{k+1}$ .

Dans le cas de la réflexion, le rayon lumineux traverse également la normale et est la symétrique relativement à celle-ci du rayon incident puisque  $i_k = i_{k+1}$ .

### 1.2.3 - Équation des rayons lumineux

On peut généraliser les lois de Snell–Descartes dans le cas de la propagation des rayons lumineux dans un milieu *hétérogène* en recherchant la condition d'extremum de l'intégrale 1.2. Considérons pour cela deux chemins AB voisins, représentés par les courbes (C) et (C') de la fig. 1.3.

On passe de (C) à (C') par le déplacement infinitésimal  $\delta\vec{M} = \vec{MM}'$  ; ce déplacement s'accompagne d'une variation du chemin optique  $\delta\mathcal{L}$  qui, compte tenu du principe de Fermat, est nul au voisinage d'un rayon lumineux effectif.

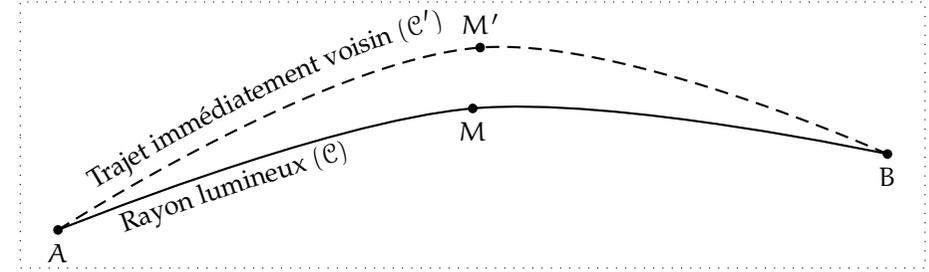


FIG. 1.3 – Extremum du chemin optique

On aura donc  $\int_{M \in (C)} \delta(n\vec{u}_t \cdot d\vec{r}) = 0$ , avec  $\delta(n\vec{u}_t \cdot d\vec{r}) = \delta n(\vec{u}_t \cdot d\vec{r}) + n\vec{u}_t \cdot \delta d\vec{r}$  puisque  $\delta\vec{u}_t$  est perpendiculaire à  $\vec{u}_t$  donc à  $d\vec{r} = \vec{u}_t ds$ . Le vecteur  $\delta d\vec{r}$  peut être défini comme  $\delta d\vec{r} = d(\vec{OM}') - d(\vec{OM})$  donc aussi  $\delta d\vec{r} = d\vec{MM}' = d\delta\vec{r}$ , et on peut donc réécrire la seconde partie de l'intégrale,  $\int_{M \in (C)} n\vec{u}_t \cdot d\delta\vec{r} = [n\vec{u}_t \delta r]_A^B - \int_{M \in (C)} \delta\vec{r} \cdot d(n\vec{u}_t)$ . Dans cette intégration par parties, le terme tout intégré est nul puisque  $\delta\vec{r}(A) = \delta\vec{r}(B) = 0$  ; remarquant alors que  $\vec{u}_t \cdot d\vec{r} = ds$ , on peut réécrire le principe de Fermat sous la forme  $\int_{M \in (C)} \left\{ \delta n - \delta\vec{r} \frac{dn\vec{u}_t}{ds} \right\} ds = 0$ .

Cette intégrale devant être nulle sur toute partie du rayon lumineux effectif, l'intégrand ne peut être que nul en tout point de ce rayon, et l'équation des rayons lumineux prend la forme  $\delta n = \delta\vec{r} \frac{dn\vec{u}_t}{ds}$ , pour tout déplacement arbitraire  $\delta\vec{r}$ . Comme dans ce cas on peut écrire  $\delta n = \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \delta\vec{r}$ , on obtient l'équation différentielle des rayons lumineux :

$$\frac{d(n\vec{u}_t)}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}} n \quad (1.4)$$

Si on considère une surface iso-n comme un dioptre local, le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} n$  est la normale à ce dioptre et on retrouve bien la relation  $d(n\vec{u}_t) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} n = \vec{0}$ , qui généralise les lois de Snell–Descartes (1.3).

### 1.2.4 - Théorème de Malus

Considérons en effet un point A, source de lumière, et traitons le chemin optique  $\mathcal{L}(M) = (AM)$  comme une fonction du point M, pour tout point atteint par au moins un rayon lumineux issu de A.

Pour  $M$  et  $M'$  voisins, la différence de chemin optique  $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(M') - \mathcal{L}(M)$  depuis la source commune  $A$  s'écrit sous la forme  $\delta\mathcal{L} = \overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{L} \cdot \delta\vec{r}$ , mais on peut aussi faire le même calcul que celui qui a été développé ci-dessus, à un détail près : le terme tout intégré  $[\vec{n}\vec{u}_t \cdot \delta\vec{r}]_A^M$  s'annule toujours en  $A$  mais plus forcément en  $M$  ; il reste donc  $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{L} \cdot \delta\vec{r} = \vec{n}\vec{u}_t \cdot \delta\vec{r}$ . Ce résultat devant être vrai pour tout déplacement  $\delta\vec{r}$ , il reste :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{L} = \vec{n}\vec{u}_t \quad (1.5)$$

dont nous ne conserverons en pratique qu'une forme faible : les surfaces de chemin optique identiques, que nous appellerons dans la suite *surfaces équi-phase* ou *surfaces d'onde*, sont par définition orthogonales au gradient de  $\mathcal{L}$ , donc aussi à  $\vec{u}_t$  :

#### THÉORÈME DE MALUS

Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces équi-phase, surfaces d'égal chemin optique depuis une source de lumière ponctuelle donnée.

Le théorème de Malus est illustré sur la fig. 1.4 dans deux cas simples, dans un milieu homogène : une onde plane (les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires aux rayons lumineux, la source  $A$  est à l'infini) et une onde sphérique (la source  $A$  est à distance finie).

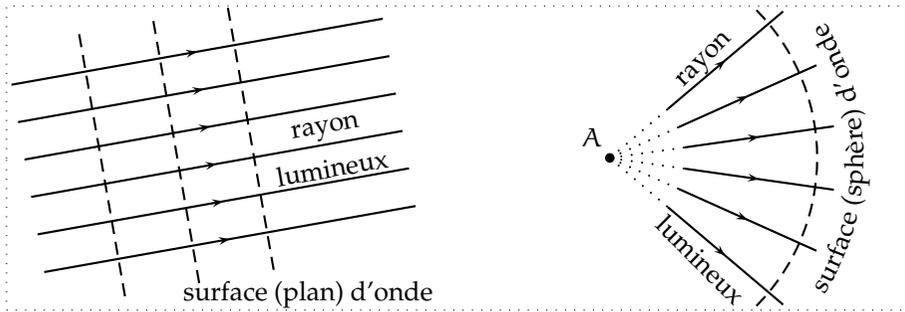


FIG. 1.4 – Théorème de Malus, onde plane et onde sphérique

### 1.3 – Stigmatisme

#### 1.3.1 - Objets et images

On considère dans cette partie un certain système optique  $(\Sigma)$ , formé d'une succession de milieux matériels (homogènes ou non) et de dioptries ou de miroirs, délimité par une

face d'entrée  $(\Sigma_e)$  et une face de sortie  $(\Sigma_s)$  (voir fig. 1.5). L'espace physique est donc orienté et les rayons lumineux seront supposés se diriger de la face d'entrée vers la face de sortie.

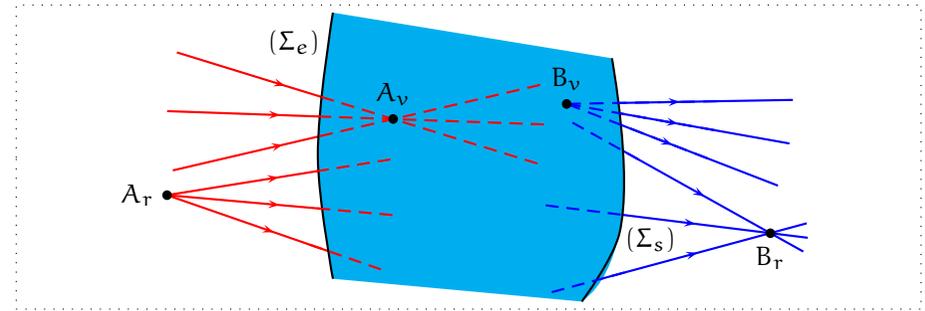


FIG. 1.5 – Objet et Image pour un système optique

On appelle *objet* de l'optique géométrique un point  $A$  d'où divergent un certain nombre de rayons lumineux (point *objet réel*, comme le point  $A_r$  de la fig. 1.5, s'il est situé avant la face d'entrée  $(\Sigma_e)$  du système optique) ou bien un point d'où *divergeraient* ces rayons si  $(\Sigma)$  était absent (point *objet virtuel*, comme le point  $A_v$  de la fig. 1.5, situé après la face d'entrée  $(\Sigma_e)$  du système optique).

De la même façon, un faisceau émergent du système  $(\Sigma)$  et formant un point de convergence après la face de sortie  $(\Sigma_s)$  définit une *image réelle* formée par le système  $(\Sigma)$  ; c'est le cas du point  $B_r$  de la fig. 1.5. Le système  $(\Sigma)$  peut aussi produire un faisceau divergent, qui semblerait provenir d'une image  $B_v$ , si le système  $(\Sigma)$  était absent ; le point correspondant porte alors le nom d'*image virtuelle* formée par  $(\Sigma)$ , comme  $B_v$  sur la fig. 1.5.

#### 1.3.2 - Condition de stigmatisme

Le but d'un système optique est en général l'association de couples objet-image : lorsque tous les rayons lumineux issus de l'objet  $A$  (réel ou virtuel) donnent, après traversée du système optique  $(\Sigma)$ , un point de convergence unique (ou image)  $A'$  (réelle ou virtuelle), on dira que le système est *stigmatique* pour le couple  $(A, A')$ .

Un rayon lumineux issu de l'objet  $A$  et traversant le système optique  $(\Sigma)$  parviendra au point  $A'$  si, et seulement si le chemin optique  $(AA')$  est stationnaire (extrémal) pour le trajet formé de ce rayon lumineux effectif :  $d(AA') = 0$ .

Pour que tous les rayons lumineux issus de  $A$  atteignent  $A'$ , il faut et il suffit donc que le chemin optique  $(AA')$  soit une fonction (du rayon liant  $A$  à  $A'$ ) *partout stationnaire*, c'est-à-dire constante :

### CONDITION DE STIGMATISME

Le système optique ( $\Sigma$ ) est stationnaire pour le couple objet-image ( $A, A'$ ) si, et seulement si le chemin optique ( $AA'$ ) est constant pour tous les rayons lumineux joignant  $A$  à  $A'$  à travers ( $\Sigma$ ).

### 1.3.3 - Stigmatisme par réfraction

**Prisme droit** Citons d'abord un exemple de système stigmatique par réfraction. Il s'agit d'un prisme droit, d'arête  $\Delta$ , d'angle au sommet  $\alpha$ , formé de verre d'indice  $n$ , plongé dans l'air (assimilé au vide). On ne considère ici que des rayons se propageant dans le plan de section principale, perpendiculaire à  $(\Delta)$ , qui est aussi le plan de la fig. 1.6. Le rayon envisagé est caractérisé par le chemin optique  $(HKLM) = \mathcal{L}(x)$ ,  $x = \overline{\Delta K}$  repérant le point d'incidence sur le prisme.

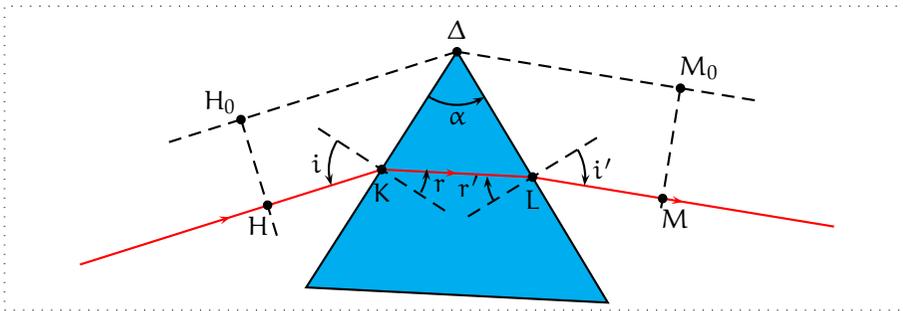


FIG. 1.6 – Stigmatisme du prisme droit

On a évidemment  $(HK) = (H_0\Delta) - x \sin i$  et, en posant  $x' = \Delta L$  ( $x'$  est fonction implicite de  $x$ ),  $(LM) = (\Delta M_0) - x' \sin i'$ . Enfin,  $(KL) = n(x \sin r + x' \sin r')$ . Finalement, on trouve  $(HKLM) = (H_0\Delta M_0) + x(n \sin r - \sin i) + x'(n \sin r' - \sin i')$ . L'application des lois de Snell-Descartes mène donc à  $(HKLM) = (H_0\Delta M_0)$ , quel que soit  $x$ : le prisme est donc stigmatique, avec comme objet  $A$  l'intersection des rayons incidents (à l'infini) et comme image  $A'$  l'intersection des rayons émergents (également à l'infini).

Retenons qu'un objet (ou une image) à l'infini apparaît dans une étude optique comme un faisceau parallèle; le stigmatisme ne permet alors pas de déterminer la valeur du chemin optique (qui est en toute rigueur lui-même infini) mais seulement son invariance pour tout rayon menant d'un plan de phase  $(H_0H)$  à un autre plan de phase  $(M_0M)$ .

Ce système stigmatique est, rappelons-le, régi par les équations du prisme, qui prennent la forme classique :

$$\sin i = n \sin r \quad r + r' = \alpha \quad \sin i' = n \sin r' \quad D = i + i' - \alpha \quad (1.6)$$

qu'on a complété par la définition de la *dévi*ation  $D$  du rayon à la traversée du prisme;  $D$  est la somme des déviations  $i - r$  à l'entrée du prisme et  $i' - r'$  à sa sortie. Notons que ces deux déviations se font dans le même sens, du côté de la base du prisme.

**Fibre à gradient d'indice** Étudions un second système couramment utilisé, formé d'une fibre optique cylindrique; l'indice optique du matériau constituant la fibre décroît régulièrement avec la distance  $r$  à l'axe de symétrie selon la loi  $n^2(r) = n_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ .

L'équation 1.4 des rayons lumineux devient ici  $\frac{d}{ds}(n\vec{u}_t) = \frac{dn}{dr}\vec{u}_r$ , en utilisant les coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  confondu avec celui de la fibre. On en déduit que  $\frac{d}{ds}(\vec{r} \wedge n\vec{u}_t) = \vec{0}$  puisque  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_t$ ; il reste donc le vecteur invariant  $\vec{r} \wedge n\vec{u}_t$  dont les composantes cylindriques sont celles de  $n(r) \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} r \frac{dr}{ds} \\ r \frac{d\theta}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{bmatrix} = n(r) \begin{bmatrix} -zr \frac{d\theta}{ds} \\ z \frac{dr}{ds} - r \frac{dz}{ds} \\ r^2 \frac{d\theta}{ds} \end{bmatrix}$ .

Considérons un rayon particulier qui entre dans la fibre en un point de son axe ( $r = 0$ ); des deux projections radiale et axiale on déduit immédiatement  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ , c'est-à-dire  $\theta = \text{Cte}$ : le rayon se propage dans un plan méridien de la fibre.

On peut alors projeter l'équation  $\frac{d}{ds}(n\vec{u}_t) = \frac{dn}{dr}\vec{u}_r$  sur l'axe fixe  $\vec{u}_z$  pour obtenir l'équation différentielle du rayon lumineux,  $n(r) \frac{dz}{ds} = \text{Cte}$ . Introduisant l'angle  $i(r)$  fait par le rayon lumineux avec l'axe  $(Oz)$  en un point quelconque de la fibre, cette relation s'écrit encore  $n(r) \cos i(r) = n_0 \cos i_0$ ,  $i_0$  désignant l'angle sous lequel la fibre est éclairée (on obtient une généralisation évidente des lois de Snell-Descartes, cf. fig. 1.7).

L'équation de la trajectoire du rayon lumineux  $n^2(r) \frac{dz^2}{dr^2 + dz^2} = n_0^2 \sin^2 i_0$  s'écrit aussi  $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\tan^2 i_0} - \frac{r^2}{\sin^2 i_0 a^2}$  donc aussi  $\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{r}{\sin^2 i_0 a^2}$ ; sa solution est, au vu des conditions initiales, la courbe sinusoïde de la fig. 1.7,  $r(z) = \frac{a \sin^2 i_0}{\cos i_0} \sin \frac{z}{\sin i_0 a}$ .

Un point  $H$  de l'axe est donc atteint par ce rayon lumineux au bout de  $N$  demi-périodes de la sinusoïde ( $N = 4$  sur la fig. 1.7), après un temps de parcours  $\tau_N = N\tau_1$ , avec  $\tau_1 = \frac{\mathcal{L}}{c_0}$  où le chemin optique  $\mathcal{L}$  est donné par l'intégrale  $\mathcal{L} = \int n ds$  avec  $ds = \frac{n}{n_0 \sin i_0} dz$ . Il reste

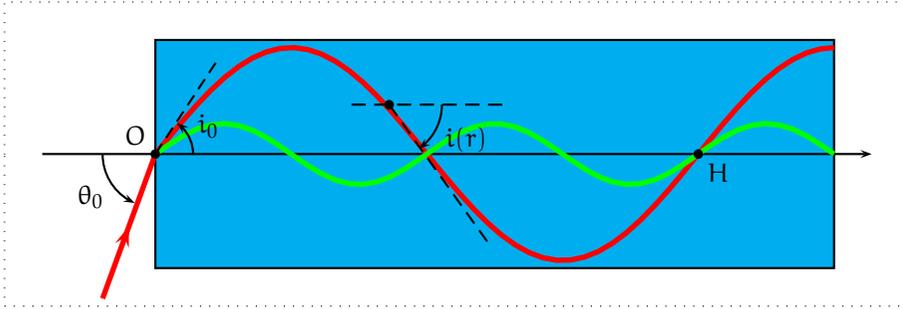


FIG. 1.7 – Dispersion dans une fibre optique

$$\text{après calculs } \tau_1 = \frac{\pi a n_0}{c_0} \left( 1 - \frac{\sin^4 i_0}{\cos^2 i_0} \right).$$

Manifestement, ce temps de parcours dépend de  $i_0$ , donc du rayon lumineux : le système n'est *pas stigmatique* pour un objet situé en O et une image située sur l'axe, même si plusieurs rayons lumineux (sinusoïdes de périodes différentes sur la fig. 1.7, correspondant à des angles  $i_0$  différents) atteignent le même point.

Lors d'un éclairage large,  $i_0 \in [0; i_{\max}]$  ; une impulsion de courte durée à l'entrée dans la fibre est donc étalée sur une durée  $\delta t = |N\tau_1(i_{\max}) - N\tau_1(0)|$  soit  $\delta t \simeq \frac{n_0 \ell \sin^4 i_{\max}}{c_0 \cos^2 i_{\max}}$ , si  $\ell$  est la longueur de la fibre traversée. Cet étalement d'un signal (on parle de *dispersion intermodale*) est préjudiciable au transport d'information : si on veut l'éviter, on doit éclairer la fibre sous un angle très faible puisqu'alors  $\delta t \sim n_0 \ell i_{\max}^4$  ; on est donc limité par la condition  $\ell \ll \frac{c_0 T}{n_0 i_{\max}^4}$ , où T est la plus courte période du signal transporté.

### 1.3.4 - Stigmatisme par réflexion

**Miroirs coniques** Recherchons la surface (S) d'un miroir présentant un stigmatisme rigoureux par une seule réflexion pour un couple (A, A'). La condition de stigmatisme  $nAI + nIA' = \text{Cte}$  peut être comprise comme l'équation intrinsèque définissant la surface (S), sous la forme  $IA \pm IA' = \text{Cte}$ , le signe dépendant du caractère réel ou virtuel de l'objet et de l'image.

On reconnaît ici les surfaces stigmatiques définissant un *miroir plan* (avec  $AI = IA'$ ), un *miroir ellipsoïdal* (avec  $AI + IA' = 2a$ ) ou un *miroir hyperboloïdal* (avec  $AI - IA' = 2a$ ) ; dans ces deux derniers cas, le couple objet-image pour lequel le stigmatisme est réalisé est unique, formé des deux foyers de la conique engendrant la surface (S) par révolution autour de  $AA'$ . Dans le cas (cf. fig. 1.8, tracée dans le cas astronomique : l'objet est à

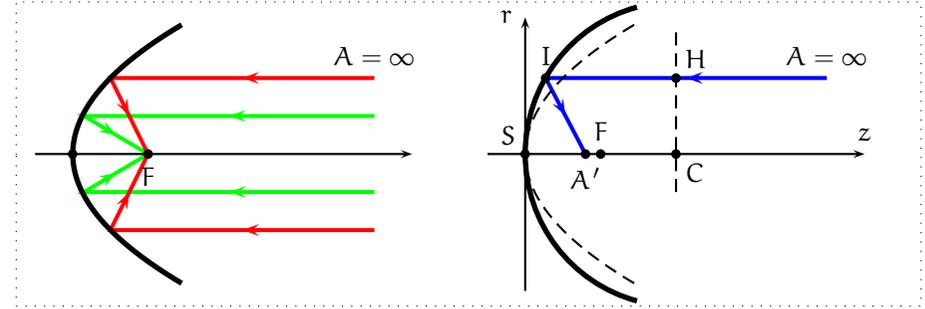


FIG. 1.8 – Miroir paraboloidal et sphère osculatrice

l'infini) où un des foyers est rejeté à l'infini, ellipse et hyperbole se confondent en une parabole, formant un miroir stigmatique pour un couple objet-image formé d'un point à l'infini et du foyer F de la parabole.

**Miroirs sphériques** Pour des raisons de commodité de réalisation, on remplace souvent le miroir paraboloidal d'équation  $r^2 = 2pz$  (le foyer F étant d'abscisse  $z_F = p/2$ ) par un miroir sphérique d'équation  $(z-p)^2 + r^2 = p^2$ , de rayon p, de centre C d'abscisse  $x_C = p$ . On peut aussi écrire  $r^2 = 2pz - z^2$  donc les deux surfaces sont osculatrices au voisinage de leur sommet commun S, d'abscisse  $z_S = 0$ .

Un tel miroir n'est toutefois pas stigmatique pour le couple formé de l'objet à l'infini et de l'image en F ; en effet, un rayon lumineux provenant de l'infini (à la distance r de l'axe) atteint la sphère au point I d'abscisse  $z_I = p - \sqrt{p^2 - r^2}$  avant d'atteindre l'axe du système au point A' d'abscisse  $z_{A'}$ . Le principe de Fermat affirme que  $\mathcal{L} = IH + IA'$  est stationnaire, avec  $IH = \sqrt{p^2 - r^2}$  et  $IA' = \sqrt{(z_{A'} - z_I)^2 + r^2}$ .

Le rayon lumineux est fixé par la condition  $\frac{d\mathcal{L}}{dr} = 0$ , qui impose la valeur de  $z_{A'}$  ; un calcul sans difficulté mène à  $z_{A'} = p - p^2/2\sqrt{p^2 - r^2}$ . La distance A'F mesure l'*aberration longitudinale de sphéricité* du miroir sphérique par rapport au modèle parabolique. Pour les faibles valeurs de r, on peut adopter la relation  $z_{A'} \simeq p/2 - r^2/4p$  ; l'aberration transversale vaut alors  $A'F_{\max} = \frac{r_{\max}^2}{4p}$ . Cette aberration contribue à limiter la qualité des images fournies ; on en limite l'effet en diaphragmant le miroir sur un faible rayon d'ouverture  $r_{\max}$ .